



Artículo

Trayectorias óptimas de inversión durante el ciclo de vida en un sistema de multifondos

Alejandra Arboleda Bedoya^{a,*}, Carlos Alberto Soto Quintero^{b,*} y Juan Carlos Gutiérrez Betancur^{c,*}

^aGerencia de Riesgo Financiero, Suramericana S.A., Medellín, Colombia

^bInversiones, Protección S.A., Medellín, Colombia

^cDepartamento de Finanzas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:

Recibido el 8 de junio de 2013

Aceptado el 23 de septiembre de 2013

Códigos JEL:

G23

C15

H55

Palabras clave

Multifondos

Tasa de reemplazo

Fondos del ciclo de vida

Valor en riesgo

Trayectoria óptima

JEL classification:

G23

C15

H55

Keywords:

Multi-funds

Replacement rate

Lifecycle funds

Value at risk

Optimal trajectory

RESUMEN

Teniendo en cuenta el nuevo esquema de multifondos en Colombia, perteneciente al Régimen de Ahorro Individual, se realizó un análisis mediante la aplicación de herramientas estocásticas y actuariales, con el fin de determinar el momento en el cual un agente (de acuerdo con sus características sociales: género, expectativa salarial, momento en el que empieza a cotizar y probabilidad de cotización) debe realizar el traslado de su cuenta de pensiones entre los diferentes portafolios ofrecidos. Considerando la rentabilidad y el riesgo que desean asumir los agentes como elementos clave, en general se observa que los individuos deben permanecer un gran porcentaje de su vida laboral en el Fondo de Mayor Riesgo para alcanzar una mayor acumulación de capital financiero y aumentar la probabilidad de obtener una tasa de reemplazo razonable.

©2013 Universidad ESAN. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos.

Optimal investment paths during the life cycle of a multi-funds system

ABSTRACT

Taking into account the new Colombian multi-funds scheme of the Individual Benefits Plan, an analysis was made through the application of stochastic and actuarial tools with the purpose of determining the moment in which agents (according to their social characteristics: sex, income expectation, moment they begin to pay contributions, contribution probability) must transfer their retirement account into the different offered portfolios. Considering the profitability and the risk the agents want to assume, as key elements, it is generally observable that they must remain a great percentage of their working lives in the high-risk investment fund to achieve a greater financial capital accumulation and a greater probability to attain a reasonable replacement rate.

©2013 Universidad ESAN. Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

1. Introducción

La situación de las pensiones en Colombia es un tema de interés para el Gobierno, los diferentes sectores y la población en general. Las discusiones frente al tema plantean posibles cambios y reformas en esta materia con el fin de mejorar las condiciones sociales. Entre

los problemas mencionados por los diferentes autores y asociaciones sobre el Sistema Colombiano se encuentran: (1) el déficit del gobierno para cubrir los costos del sistema o brecha (Restrepo y Gutiérrez, 2010); (2) inequidad, informalidad y restricciones en el mercado laboral y la baja cobertura del sistema de pensiones (Santa María, Steiner, Botero, Martínez, Millán y Arias, 2010); y (3) alcanzar adecuadas tasas de reemplazo¹ para los afiliados (Clavijo, Peña, Gonzales y Vera, 2011). Estos elementos afectan directamente el bienestar y el poder adquisitivo de la población al arribar a la tercera edad.

* Autor para correspondencia.

Correos electrónicos: aarboledab@sura.com.co (A. Arboleda Bedoya);

carlos.soto@proteccion.com.co (C.A. Soto Quintero);

jpgutie31@eafit.edu.co (J.C. Gutiérrez Betancur).

1. Tasa de Reemplazo Pensional = Mesada Pensional / Promedio Salarial o Último Salario.

Los factores identificados como determinantes de la jubilación (Anif, 2011), que vienen siendo ampliamente discutidos por los diferentes sectores de la economía son: la edad de jubilación, el número de las semanas cotizadas, la tasa de cotización, la densidad de las cotizaciones, las rentabilidades esperadas, el tiempo esperado de disfrute de la pensión y la cotización inferior al salario mínimo (Montenegro, 2012), entre otros.

Particularmente, para el Régimen de Ahorro Individual la rentabilidad es un elemento clave en las pensiones y, con el fin de apuntalar este factor, el Gobierno decidió crear el esquema Multifondos². Este esquema permite al afiliado cotizante, de acuerdo con su edad y su perfil de riesgo, elegir entre tres tipos de fondos o modalidades (Conservador, Moderado y Mayor Riesgo) para administrar sus ahorros previsionales buscando un portafolio que maximice la relación riesgo-rentabilidad en el largo plazo y le permita adquirir un mayor capital al arribar a su edad de retiro. En la actualidad, la ley determina asignar por defecto a todos los afiliados en el Fondo Moderado y solo el 0.37% de los afiliados a los fondos de pensiones han elegido ubicarse en el Fondo de Mayor Riesgo³.

Ante este nuevo panorama caracterizado por la oferta de nuevas alternativas que están disponibles para los ahorradores de los fondos de pensiones privados y considerando como objetivo fundamental de los Multifondos el de generar un mayor capital financiero (riqueza), en este trabajo se desarrolla una herramienta metodológica que permite tanto a las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) como a los afiliados medir y encontrar un umbral de probables tasas de reemplazo pensional en Colombia, que posibilite la obtención de un mejor desempeño financiero de los ahorros en pensión. Específicamente, la investigación se enfoca en identificar mediante una simulación estocástica, el momento de la vida de un agente típico en el cual se debe realizar el traslado de lo acumulado en su cuenta individual entre los diferentes fondos disponibles de manera que se obtenga una mayor tasa de reemplazo pensional. Adicionalmente, las simulaciones permitirán analizar la conveniencia de continuar con el Fondo Moderado como opción por defecto, al cual la ley vigente indica se deben asignar los individuos, independiente de su edad y aporte esperado. En este sentido, el presente artículo realiza una modelación estocástica y actuarial que permite determinar el momento en que una persona debe trasladar sus ahorros de un fondo a otro.

En la actualidad existen pocos estudios que analicen el impacto de la implementación de los Multifondos en Colombia y la posible interacción que puede existir entre ellos: A nivel local, un primer antecedente lo constituye el trabajo de Reveiz y León (2008), quienes en su investigación demuestran cómo las restricciones y los límites impuestos por el Gobierno a las inversiones de los Fondos de Pensiones Obligatorias restringen el retorno esperado de los portafolios de las AFP y afirman que la innovación de los Multifondos busca maximizar la riqueza de los afiliados.

Posteriormente, Hernández (2009) analiza el efectos del sistema Multifondos en el Régimen de Ahorro Individual en Colombia y la relación existente entre el valor acumulado en las cuentas de ahorro individual pensional y el riesgo asumido por los individuos. Según Hernández, la mejor decisión histórica de inversión relacionada con la cuenta de ahorro individual de un afiliado habría consistido en tener invertido todo su portafolio en un activo de renta variable.

Como referencia internacional está disponible la experiencia de los Multifondos en Chile. Al respecto, Herscovich (2003) explica cómo la implementación de los Multifondos en el sistema de pensiones chileno se ha sustentado en la teoría clásica de portafolio (relación riesgo-retorno) y en la teoría de diversificación temporal; la

cual explica la incidencia del horizonte temporal del inversor en la decisión con respecto a la composición del portafolio. Asimismo, Herscovich expone el fuerte impacto que tendría sobre el capital acumulado de un afiliado el poder contar con una opción de inversión que le permita lograr en el largo plazo una mayor rentabilidad acumulada.

El presente artículo se desarrolla en cinco secciones: la primera obedece a esta introducción. En la sección dos se describe brevemente el funcionamiento del Sistema Pensional en Colombia con las posibilidades y las restricciones de los Multifondos y se detallan los antecedentes bibliográficos. La tercera presenta la modelación estocástica y actuarial que permitirá determinar el momento en que una persona debe trasladar sus ahorros de un fondo a otro. La cuarta sección expone los resultados, donde se observará cómo, en general, los agentes deben permanecer un gran porcentaje de su vida laboral en el portafolio de mayor riesgo para alcanzar un mayor ahorro de capital financiero y tener una mayor probabilidad de mejorar sustancialmente la tasa de reemplazo. En la sección cinco se discuten las principales conclusiones de la investigación.

2. Marco teórico

2.1. Características del Sistema de Pensiones en Colombia

El Sistema Pensional en Colombia está conformado por dos regímenes: el Régimen Solidario de Prima Media y el Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad. En el Régimen de Prima Media, los aportes de los afiliados y sus rendimientos constituyen un fondo común de naturaleza pública, que garantiza el pago a los beneficiarios de la pensión de vejez, de invalidez o de supervivientes. Para el Régimen de Prima Media, la Ley 100 de 1993 consideró un nuevo cálculo de la pensión, basado en el promedio de los últimos diez años (antes era solo el promedio de los dos últimos años). Posteriormente se promulgó la ley 797, de 2003, que elevó la edad de jubilación de 55 a 57 años para las mujeres y de 60 a 62 para los hombres, a partir de 2014.

En el Régimen de Ahorro Individual, cada afiliado tiene una cuenta en una Administradora de Fondos de pensiones (AFP). De esta manera la pensión está dada en función del monto de las contribuciones pensionales y el retorno financiero que logre la inversión de su portafolio de ahorros. En Colombia existen actualmente cinco Administradoras de Fondos de Pensión: Protección, Colfondos, Horizonte, Porvenir y Skandia.

En el desarrollo del esquema de Multifondos definido por la Ley 1328 de 2009, desde el 23 de marzo de 2010, se viene realizando en Colombia la implementación de esta innovación financiera para los Fondos de Pensiones Obligatorias del Régimen de Ahorro Individual. Desde la puesta en marcha de este esquema se ha observado cómo casi la totalidad de los afiliados al sistema de Multifondos, se encuentra en la opción por defecto de los Fondos de Perfil Moderado (94.7%) y los Fondos de Perfil Conservador⁴ (5%).

En este sentido, desde el punto de vista del Perfil de Riesgo, ASOFONDOS⁵ (2012) establece las siguientes definiciones y estrategias para cada uno de los fondos creados:

- **Fondo Conservador:** Dirigido a aquellas personas cercanas a la edad de jubilación y quienes demuestren más aversión al riesgo al momento de efectuar sus inversiones. El propósito fundamental de este fondo consiste en preservar el capital acumulado, reduciendo la exposición ante las fluctuaciones del corto plazo.

2. Ley 1328 de 2009.

3. Informe Mensual de Pensiones y Cesantías. Superintendencia Financiera de Colombia. Junio de 2013.

4. Informe Mensual de Pensiones y Cesantías. Superintendencia Financiera de Colombia. Junio de 2013.

5. Gremio que agrupa a las AFP del sistema (Protección, Colfondos, Horizonte, Porvenir y Skandia).

- **Fondo Moderado:** Alternativa recomendable para aquellos afiliados a quienes les falten cinco o diez años para obtener su pensión o quienes tengan una tolerancia media al riesgo. Por tanto, las volatilidades en las inversiones son moderadas.
- **Fondo de Mayor Riesgo:** Dirigido a cotizantes jóvenes o personas a las que les falten diez o más años para jubilarse. Las inversiones en este fondo presentan mayores fluctuaciones en períodos cortos pero mayores rentabilidades en el largo plazo. Quienes opten por este fondo tienen mayor tolerancia al riesgo.

Para los Multifondos existe un Régimen de Inversiones, regulado por el Decreto 2555 de 2010. Dicho régimen establece unos límites para los diferentes tipos de inversión, de acuerdo con el fondo elegido.

2.2. Revisión bibliográfica

La literatura antecedente considerada se basa esencialmente en metodologías para la simulación de la pensión, la tasa de retiro sostenible, la simulación de rentabilidades de largo plazo, los determinantes de la tasa de reemplazo, además de considerar referencias internacionales relativas al funcionamiento de los Fondos de Ciclo de Vida. De esta revisión se encontró que las metodologías pueden clasificarse en dos grandes grupos: (1) estáticas, en donde la metodología se basa en modelos de estimación de tasas sostenibles de reemplazo con especificaciones en la tasa de retiro; y (2) dinámicas, cuya metodología se basa en definir el camino o trayectoria de inversión que deben seguir los inversionistas durante el transcurso de su vida. A continuación se describen las aproximaciones metodológicas descritas.

Inicialmente, Malkiel (1996) recomienda un portafolio muy agresivo (acciones) para los individuos más jóvenes en los primeros años de su vida laboral y posteriormente tener un portafolio más conservador invertido en renta fija (bonos) cuando se acerca la edad de retiro.

Dentro de los antecedentes de enfoque estático se encuentra la literatura relacionada con la tasa sostenible de retiro, que es presentada por Salter y Evensky (2008), quienes definen como tasa de retiro sostenible el máximo porcentaje que puede ser retirado mensualmente de la cuenta individual sin agotar los recursos durante la vida pensional del individuo. Este análisis lo realizan a partir de revisiones bibliográficas de estudios desarrollados entre los años 1994 y 2006; donde se destaca principalmente Bengen (1994) como predecesor de las investigaciones relacionadas con el cálculo de la tasa de retiro sostenible y quien determina que la proporción óptima de activos de renta variable que se debe tener en un portafolio para obtener una tasa de retiro del 4% sobre el saldo final del portafolio al pensarse, se encuentra entre 50% y 70%.

Los estudios de estos autores coinciden en que los factores más significativos en la determinación de la tasa sostenible de retiro son: la metodología, la asignación de activos, el consumo en la edad de retiro, la probabilidad de fracaso del fondo y el horizonte de tiempo.

Dentro de las metodologías de enfoque dinámico y antes de la entrada en vigencia de la norma de los Multifondos, Hernández (2009) analizó los efectos del sistema Multifondos en el Régimen de Ahorro Individual en Colombia, encontrando que los individuos disminuirían la proporción invertida en activos riesgosos (acciones) ante incrementos en el coeficiente de aversión al riesgo y cuando el nivel acumulado en sus cuentas de pensión se incrementa.

A su vez, Reveiz, León, Castro y Piraquive (2009) presentan un modelo de simulación para estimar los flujos de caja de un pensionado del régimen de ahorro individual, además de establecer conclusiones respecto de medidas que se deben tomar en el sistema para garantizar una pensión para los afiliados. Estos autores realizan la simulación de la cuenta individual de un agente típico que permanece toda la vida en un mismo fondo y que hace una inversión dinámica de una tercera parte de su vida en cada fondo, para la cual se

supone un retorno del portafolio caracterizado por un proceso de Wiener generalizado para la vida del individuo y se calculan las probabilidades de aportes en cada uno de los períodos estudiados.

Adicionalmente, en 2009 se publicó el libro «Pensiones y Portafolios: La Construcción de una Política Pública», que constituye la primera colección de diecinueve artículos escritos sobre el tema con una perspectiva local para Colombia. De este importante trabajo se destacan dos artículos relativos al tema eficiencia de los portafolios de pensiones obligatorias en Colombia. En el primer artículo, «Análisis de Eficiencia de los Portafolios Pensionales Obligatorios en Colombia», Jara, Gómez y Pardo analizan la eficiencia de los portafolios de los fondos teniendo en cuenta los límites de inversión establecidos por la regulación. Específicamente, los autores crean la frontera eficiente para el entorno expuesto, ubican los portafolios de las AFP con respecto a esta frontera; y finalmente miden la sensibilidad de la frontera con respecto a los límites de inversión, a los modelos diseñados y a las series de tiempo utilizadas. Para estos fines, los autores utilizan un enfoque estilo Markowitz para hallar el portafolio óptimo, con horizonte de inversión de un año.

El segundo artículo de interés incluido en el libro en mención es «Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un enfoque alternativo», escrito por León y Laserna. Este artículo ofrece una perspectiva alterna al criterio clásico de Media-Varianza para la asignación de activos en Fondos de Pensiones Obligatorias. Los autores proponen la utilización del criterio de Retorno Total-Máximo Drawdown como función objetivo para la optimización del portafolio. Este criterio resulta muy atractivo por la intuición económica que lleva implícita. Los autores contrastan los resultados de ambos enfoques verificando la creación de riqueza para todos los portafolios, identificando el portafolio que logra mayor acumulación. Esto les permite concluir que el enfoque Retorno Total-Máximo Drawdown domina la frontera obtenida utilizando Media-Varianza. Adicionalmente, los autores se apoyan en las advertencias hechas por Litterman (2003), quien reconoce dos fuentes de debilidad en la utilización de medidas de volatilidad (varianza o desviación estándar), a saber: (1) sólo en casos especiales, como la normalidad de los retornos de los activos, la volatilidad sería suficiente como medida de riesgo. (2) La volatilidad no diferencia entre riesgo de aumento y riesgo de caída en el precio de un activo. En este sentido, es conveniente reconocer que no puede confiarse excesivamente en los supuestos iniciales porque cuando los mercados entran en zonas de incertidumbre, los modelos son incapaces de capturar los choques extremos.

Posteriormente, un informe publicado por Alonso, Herrera, Llanes y Tuesta (2010) del BBVA, simula para Colombia diferentes escenarios bajo un esquema hipotético de Multifondos, tomando como referencia el funcionamiento de los fondos en Chile, México y Perú; lo anterior con el fin de calcular las tasas de reemplazo bajo diversas combinaciones de renta variable y renta fija en los portafolios de inversión. Este análisis concluye que la implementación de un sistema de Multifondos permite la obtención de retornos eficientes para los afiliados al sistema en el largo plazo, con volatilidades acotadas en el tiempo.

Adicionalmente, se revisó la experiencia de los Fondos de Ciclo de Vida conocidos en Estados Unidos como *Target Date Funds* (Yoon, 2010). Este tipo de fondos nació en 1994 con el objetivo de balancear los riesgos de longevidad y de mercado mediante una adecuada asignación de activos denominada «*Glide Path - Asset Allocation*». En esta línea, Jacobsen, Chan y Barbee (2010) comparan una asignación de activos de un portafolio de inversiones agresivo con uno más conservador con el fin de analizar la exposición al riesgo de longevidad y al riesgo de mercado. Bajo un escenario optimista, concluyen que un portafolio agresivo en activos riesgosos tiene un mejor comportamiento que un portafolio de características más conservadoras. Finalmente, estos autores indican que una selección adecuada de activos de inversión dependerá de las características demográficas

de los afiliados y que la mejor alternativa para balancear los riesgos de longevidad y de mercado consiste en el incremento en la tasa de ahorro de los afiliados.

Por su parte Antolin, Payet y Yermo (2010) analizan cómo el comportamiento de las diferentes estrategias de inversión en el ciclo de vida afectan los ingresos en el retiro. En este estudio se concluye que ante una alta exposición en activos de alto riesgo luego del período de acumulación, se pueden obtener tasas de reemplazo mayores que si se realiza una inversión en activos de menor riesgo.

Complementariamente yoon (2010) en su artículo «*Glide path and dynamic asset allocation of target date funds*» indica que el horizonte de retiro de un inversionista no debe ser la única variable que determine el sendero de asignación de activos de un Fondo de Ciclo de Vida. Según el autor, las condiciones de mercado deberían provocar ajustes dinámicos de las inversiones existentes, dado que el riesgo cambia a través del tiempo.

Con respecto al criterio de aversión al riesgo de un individuo frente a la decisión de inversión de su portafolio de pensiones, Pfau (2010) encuentra que los inversionistas con una alta aversión al riesgo podrían preferir un enfoque de Fondos de Ciclo de Vida y no una estrategia de inversión en activos de renta fija. Los fondos de Ciclo de Vida invierten en una alta proporción de acciones al inicio del ciclo y gradualmente realizan el traslado a activos más conservadores a medida que se acerca la fecha del retiro.

En relación con las tasas de reemplazo, Valverde y Pena (2011) estudian los determinantes de la tasa de reemplazo pensional para los países latinoamericanos (Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, El Salvador, México, Perú, Republica Dominicana y Uruguay). Estos autores simulan diferentes escenarios para cada país, tomando como unidad de análisis al individuo por medio de una medición teórica prospectiva de largo plazo que captura datos transversales promedios y contiene las características individuales principales del grupo cubierto (agente típico).

El modelo trabajado por Valverde y Pena (2011) asume que la tasa de reemplazo corresponde a una variable dependiente de múltiples factores, como se muestra en la tabla 1.

Los autores concluyen que las variables mencionadas en la tabla 1 son representativas para la determinación de la tasa de reemplazo pensional y tal vez la conclusión más relevante de este estudio es que aunque para todos los países de Latinoamérica son variables relevantes, todas afectan de manera diferente a cada uno de ellos.

Recientemente, han surgido artículos que advierten sobre las desventajas que conlleva la recomendación de invertir proporciones significativas del portafolio en acciones con horizontes de inversión de largo plazo. En esta línea de investigación se destaca el artículo de Valdés (2010), quien identifica dos fuentes potenciales de riesgo de la perspectiva habitual de recomendación de inversión en acciones basándose en el plazo: (1) El error de predicción de la prima de riesgo accionario se amplifica en consonancia con la extensión del horizonte de inversión y (2) el error de estimación de esta prima de riesgo crece debido a que al aumentar el horizonte de inversión, se pierde independencia de los datos entre sí.

No obstante esta situación, el presente artículo de investigación utiliza el criterio de Media-Varianza para la asignación del portafolio, admitiendo la posibilidad de que exista un riesgo muestral que

aumente con el horizonte de inversión al utilizar el criterio Media-Varianza en un contexto intertemporal.

3. Modelo

El modelo de simulación desarrollado constituye una herramienta de apoyo para la toma de decisiones de los afiliados al Régimen de Ahorro Individual, en particular para identificar en qué momento de la vida debe realizarse el traslado de su cuenta individual entre los Multifondos. El modelo está diseñado para analizar el comportamiento y resultado del valor de la Cuenta de Ahorro Individual, de diferentes agentes típicos, adscritos al sistema de Multifondos de Pensiones Obligatorias. De esta manera, se puede estimar la probabilidad que tienen los agentes de alcanzar determinados niveles de tasa de reemplazo y teniendo en cuenta un nivel de riesgo asumido por cada agente, definir las trayectorias o caminos de inversión que deberían seguir.

3.1. Estrategia de estimación

La metodología de esta investigación se basa en una modelación estocástica y actuarial que permitirá determinar el momento en que una persona debe trasladar sus ahorros de un fondo a otro. En primera instancia, se identifican diferentes agentes típicos representativos de la población que cotizan en el sistema de ahorro individual (según su género, densidad de cotización, curva salarial).

En segunda instancia se construye un modelo discreto basado en la metodología sugerida por Reveiz et al. (2009), con modificaciones importantes en variables relacionadas con: (1) la estimación del portafolio de inversión, (2) la inclusión del sistema de Multifondos en Colombia a partir del año 2010, (3) la simulación de portafolios dinámicos en la cual el agente se traslada entre fondos a diferentes edades y (4) el enfoque del resultado-meta buscado; porque se estima la probabilidad de alcanzar diferentes tasas de reemplazo hallando finalmente el camino óptimo de inversión sugerido para cada uno de los agentes. Para determinar esta trayectoria óptima, se simulará para cada agente el monto de capital que alcanza a ahorrar haciendo transiciones entre los diferentes Multifondos durante el transcurso de su vida laboral.

En tercera instancia, se considera un modelo actuarial para evaluar el monto de capital que debe ahorrar cada agente, de manera que le permita alcanzar diferentes tasas de reemplazo. Con los resultados de los valores de capital financiero acumulado encontrados en cada combinación de Multifondos, se establece la relación con el último salario previo al retiro para obtener diferentes tasas de reemplazo e incorporar la aversión al riesgo mediante la implementación de la metodología VaR para cada agente representativo. Esto permitirá determinar la edad en la cual cada individuo optimizaría su capital de pensión de acuerdo con sus preferencias y perfil. A continuación, se caracterizan los agentes y se describe la metodología empleada.

3.2. Determinación de agentes típicos

La selección de los agentes típicos se realiza en base a los factores sociodemográficos planteados por Valverde y Pena (2011), que influyen en la determinación de la tasa de reemplazo pensional. Los factores considerados son: el género, la edad de incorporación al mercado laboral, la probabilidad de cotización efectiva (densidad de cotización), el salario y la edad de jubilación.

Para los propósitos del presente artículo, se definió la segmentación de cada variable de la siguiente manera:

- Género: hombre o mujer.
- Edad de incorporación al mercado laboral: según lo planteado por Arango y Posada (2002) sobre el promedio de edad de las

Tabla 1
Determinantes de la tasa de reemplazo

Factores	Determinantes
Económicos	Rentabilidad del fondo
Socio-demográficos	Edad de incorporación al mercado laboral Nivel de cobertura efectiva (probabilidad de aporte) Fecundidad (mujer)
Programáticos	Tasa de aportes Comisión de administración Edad mínima de retiro

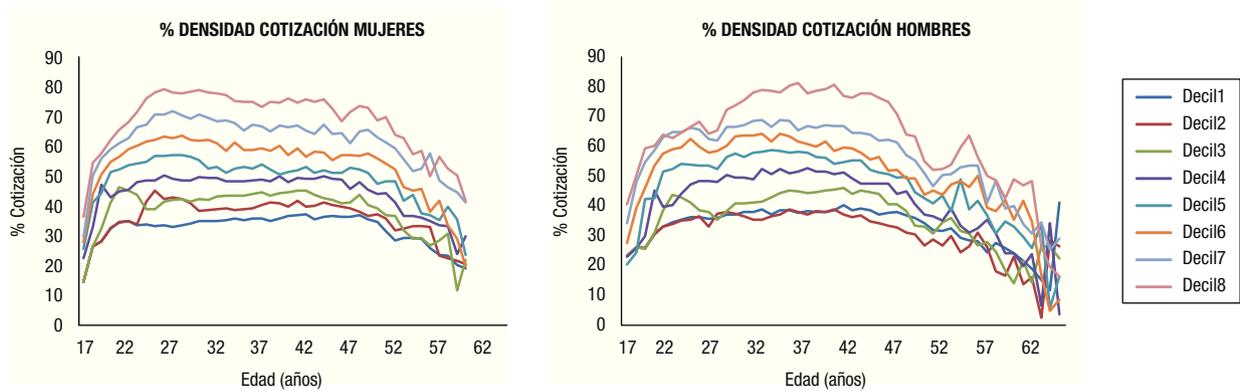


Figura 1. Densidad (probabilidad) de cotización al Sistema Pensional. Fuente: ASOFONDOS.

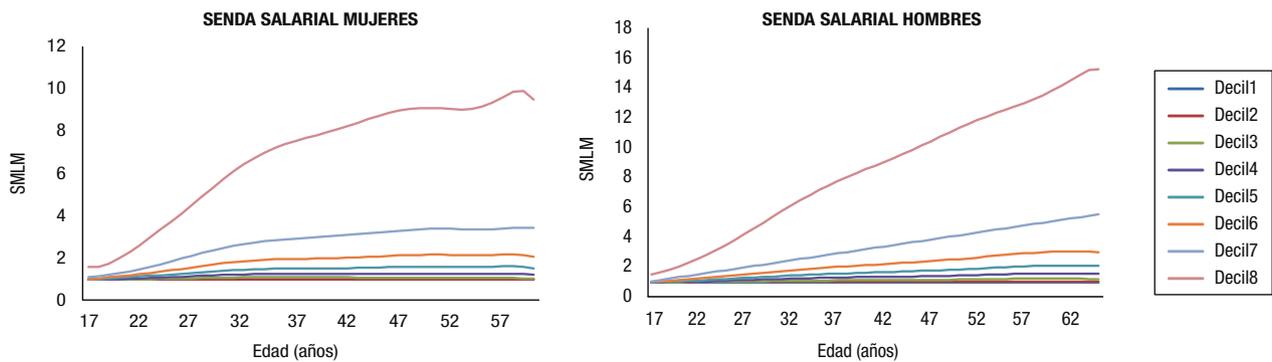


Figura 2. Senda salarial. Fuente: ASOFONDOS.

Tabla 2
Caracterización de los agentes típicos

Agente	Edad en la que empieza a cotizar	Sexo	Edad de jubilación	Senda salarial (8 deciles)
1	24 años	Hombre	62 años	Decil 4
2				Decil 6
3				Decil 8
4		Mujer	57 años	Decil 4
5				Decil 6
6				Decil 8

personas económicamente activas en Colombia, se identifica que a lo largo de la historia los individuos inician su vida laboral entre los 22 y 26 años, por lo que se considera prudente asumir que la edad promedio de inicio de la vida laboral se encuentra en 24 años.

- Densidad de cotización y senda salarial: los datos de probabilidad de cotización (fig. 1) y senda salarial (fig. 2) para hombres y mujeres se encuentran divididos por deciles poblacionales y caracterizan los posibles agentes que participan en el Régimen de Ahorro Individual. Mediante un análisis estadístico se determinan los agentes típicos a utilizar; la información muestra que el 84% de los ocupados devengan menos de 1.4 SML, que el tercer cuartil se encuentra en 2.4 SML y que el máximo es superior a 10 SML, por lo que se puede concluir que los agentes estadísticamente representativos son aquellos que se encuentran en el decil 4, 6 y 8.
- Edad de jubilación: se asume la edad definida por ley vigente⁶, la cual estipula que a partir de 2014 la edad de jubilación para las mujeres es 57 años y para los hombres 62 años; más aún, conside-

rando que no se observa en la agenda del Gobierno actual un aumento de las edades de jubilación.

Dado lo anterior, los agentes típicos definidos son los encontrados en la tabla 2.

3.3. Portafolio de inversión

Para la realización de los experimentos de simulación, se diseñó un portafolio de largo plazo que maximiza el retorno esperado ajustándose al perfil de riesgo, horizonte de inversión y objetivo de cada uno de los Multifondos. Para esto se definió un proceso de creación de frontera eficiente bajo la metodología de Markowitz que busca dar solución al siguiente modelo:

$$\text{MAX } E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i \times E(R_i) \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \tag{2}$$

Donde:

- $E(R_p)$ = Retorno esperado del portafolio.
- X_i = Participación del activo i en el portafolio.
- $E(R_i)$ = Retorno esperado del activo i .
- $\sigma^2(R_p)$ = Varianza del portafolio.
- $X_{i(j)}$ = Participación del activo i (j) en el portafolio.
- σ_{ij} = Covarianza entre el activo i y j .

Por tratarse de estrategias de largo plazo, la optimización de la ecuación (1) se elabora agrupando activos de características similares, que respondan a los perfiles reales de inversión de los portafolios.

6. Ley 797 de 2003.

Tabla 3

Agrupación de activos en el largo plazo

Agrupación	Activos
Renta Variable	Renta Variable Nacional e Internacional, Fondos de Capital Privado, <i>Commodities</i> , entre otros
Renta Fija	Deuda Privada, Deuda Pública, Depósitos, entre otros

Tabla 4

Índices representativos para volatilidades y correlaciones

Agrupación	Índice representativo
Renta Variable	COLCAP
Renta Fija	Canasta promedio de TES (TF y UVR) utilizada por el sistema de pensiones obligatorias

lios administrados por las administradoras del sistema privado de pensiones (tabla 3).

El modelo de optimización contempla las siguientes variables de entrada:

3.3.1. Retorno esperado

3.3.1.1. Renta fija

Para la estimación de los retornos esperados de esta clase de activos, se analizaron las rentabilidades reales de la canasta promedio indicada en la tabla 4, utilizada por el sistema de pensiones obligatorias para el último año, que entregó como resultado un retorno real del 5.57%. Esta rentabilidad fue comparada con el retorno real del índice de TES de Correal que para los últimos 10 años (2002-2011) fue de 5,69% (Clavijo, Vera, Vera, Mora, González, Velandia, Otálora y Cuervo, 2012). Con esto se estima que la rentabilidad esperada de este activo en el largo plazo puede encontrarse alrededor del 5%.

3.3.1.2. Renta variable

Para la rentabilidad de estos activos se consideró la prima de riesgo planteada por Fernández, Aguirreamalloa y Corres (2011). Se infiere que la prima de riesgo esperada para Colombia se encuentra entre 5,7%-10,1%. Asumiendo una posición conservadora y teniendo en cuenta que el retorno nominal de la renta fija en Colombia está alrededor del 8,675%, se espera que la renta variable tenga un retorno real del 10,51%.

3.3.2. Volatilidades y correlaciones esperadas

Las volatilidades y correlaciones esperadas se estiman por medio del análisis estadístico de las volatilidades y correlaciones históricas de los retornos de los activos, agrupados por clase de activo.

Para definir las volatilidades y correlaciones históricas por clase de activos tenidos en cuenta en la estimación, se utilizan los retornos de los últimos 5 años de índices representativos (tabla 4), de los cuales, mediante análisis históricos se obtienen las volatilidades y correlaciones esperadas necesarias para el ejercicio de optimización (tabla 5).

3.3.3. Restricciones

Con el fin de garantizar el cumplimiento de los límites del régimen de inversión de cada Multifondo de acuerdo con el Decreto 2555 de 2010, se determinaron las siguientes restricciones para cada una de las categorías, según el portafolio que se desea optimizar (tabla 6).

Tabla 5

Volatilidades y correlaciones

Correlaciones	COLCAP	Renta fija	Volatilidad
COLCAP	1,000	0,184	0,250
RF local	0,184	1,000	0,030

Tabla 6

Restricciones de portafolios

Restricción\Portafolio	Conservador	Moderado	Mayor riesgo
Mínimo renta variable	0,0%	0,0%	0,0%
Mínimo renta fija	0,0%	0,0%	0,0%
Máximo renta variable	20,0%	45,0%	70,0%
Mínimo renta variable	0,0%	20,0%	45,0%

3.4. Simulación del período de acumulación

Mediante una simulación de Montecarlo, se estima el valor acumulado en la Cuenta de Ahorro Individual de un agente, al tomar diferentes trayectorias de inversión durante su vida activa de aportes al sistema pensional, valor que es representado por la ecuación (3) originalmente planteada por Reveiz et al. (2009):

$$A_t^j = W_t^j \times Pc_t^j \times A_{t-1}^j \left(1 + \left(\frac{r_{t-1}^j}{Port_{t-1}^j} \right) \right) \tag{3}$$

Dónde Pc_t^j es la probabilidad de cotizar del agente j en el período L , la cual es asumida como las probabilidades de cotización por el decil salarial y el sexo. c_t^j es el porcentaje de cotización en términos del salario nominal del individuo, que para el año 2012 es del 11,5% y se estima constante en el período analizado para cada individuo. W_t^j es el salario nominal del individuo j en el período L , que es asumido como el comportamiento de la senda salarial por el decil salarial y el sexo. $(r_{t-1}^j / Port_{t-1}^j)$ son los rendimientos del portafolio del individuo j en el período L condicionados a la composición del portafolio vigente en el período anterior y A_t^j es el valor acumulado del portafolio del individuo j en el período L .

Por simplicidad, se asume que los retornos mensuales de cada activo se distribuyen normalmente y están determinados por un movimiento Browniano, según la ecuación (4):

$$r_{i,t} = E(r_i) \times \delta t + E(\sigma_i) \times \sqrt{\delta t} \times y_i \tag{4}$$

Donde y_i representa una variable aleatoria para el activo i que sigue una distribución normal estandarizada y se garantiza la correlación entre activos mediante la descomposición de Cholesky.

3.5. Tasa de reemplazo pensional

Mediante un modelo actuarial se define el valor que debe acumular en su cuenta un agente para alcanzar determinadas tasas de reemplazo, definiendo esta última como la relación que existe entre la mesada pensional a devengar y el último salario devengado. La anterior definición supone un escenario conservador ya que tiene en cuenta que en las sendas salariales el último salario es, en general, inferior al promedio de los últimos 10 años; además que permite medir cómo el agente cambia sus posibilidades de consumo presente en el momento del retiro.

El modelo actuarial utilizado, se describe a continuación según la ecuación (5):

$$Valor\ acumulado = \sum_{t=1}^{n_x} \frac{P_t^x \times Mesada \times (1 + ipc)^{t-1}}{(1 + ipc)^t \times (1 + Tasa\ dto)^t} \tag{5}$$

7. Dato suministrado por el área de Investigaciones Económicas de ASOFONDOS.

Donde x se define como el agente, clasificado como hombre o mujer. n se define como la esperanza de vida del agente x P_t^x corresponde a la probabilidad de sobrevivencia en el período t del agente x . Estos dos últimos componentes extraídos de la tabla de mortalidad de la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) (anexo 1). *Mesada* es el valor mensual que recibe un agente típico que satisfaga las tasas de reemplazo analizadas. *ipc* es el Índice del Precios del Consumidor de Colombia, el cual se especificó teniendo en cuenta las metas del Banco de la República de Colombia (3%-4%) y las buenas políticas del mismo para cumplirlas, por lo cual se espera tienda en el largo plazo hacia el 3,5%. Finalmente, el componente *Tasa dto* corresponde al valor esperado de renta real de los saldos de la cuenta individual después del retiro, que es estimado por la SFC en el 4%.

3.6. Riesgo asumible por los agentes

El riesgo que desean asumir los agentes para conseguir una tasas de reemplazo pensional objetivas se incluye en el modelo mediante la metodología de Valor en Riesgo (VaR – *Value at Risk*); para esto y con el fin de analizar escenarios conservadores o de mayor probabilidad de ocurrencia para cada simulación ejecutada, se estima el VaR al 99%. Esto significa que entre los diferentes caminos de inversión que puede tener un agente, este elegirá el que alcance un mayor valor acumulado con una probabilidad del 99%.

4. Resultados

Teniendo en cuenta el nuevo esquema de Multifondos de Pensiones Obligatorias y la restricción de inversión de cada uno de los portafolios de acumulación diseñados, se construye la frontera eficiente (fig. 3), que evidencia una mayor tolerancia al riesgo en el portafolio de Mayor Riesgo, lo que llevará a los agentes a tener retornos esperados de largo plazo superiores a los demás. Esto indica inicialmente que si un agente desea maximizar sus ingresos, deberá empezar su vida laboral acumulando capital en un fondo de Mayor Riesgo.

Para la simulación de la acumulación de las cuentas individuales, se definieron como portafolios óptimos (tabla 7) aquellos que se encuentran en el rango mínimo de volatilidad óptima que deben tener dichos portafolios; lo anterior es planteado por Reveiz et al. (2009); esto, con el fin de ser consecuentes con el manejo conservador que se le ha dado a la modelación en la investigación.

Teniendo en cuenta la definición y características de cada uno de los Multifondos, expuestas en el marco teórico, las simulaciones ini-

Tabla 7
Participación de activos dentro del portafolio

Portafolios	% renta variable	% renta fija	Retorno esperado	Volatilidad esperada
Conservador	15,35%	84,65%	9,6%	5,0%
Moderado	39,95%	60,05%	11,0%	10,5%
Mayor riesgo	60,15%	39,85%	12,1%	15,3%

ciales se realizaron mediante combinaciones de pares entre los portafolios Mayor Riesgo - Moderado y Moderado - Conservador (fig. 4). Las anteriores combinaciones se hacen asumiendo que un agente traslada su capital financiero del portafolio de Mayor Riesgo al de Menor Riesgo. Para cada agente se realizaron 10 000 simulaciones de cada combinación de portafolio, iniciando la combinación en 100% del tiempo del agente en el portafolio más volátil y, a medida que aumentan las combinaciones, se disminuye un mes del portafolio más volátil ingresando uno del de menor volatilidad, hasta llegar al 100% de este último.

Así, en la figura 4 se evidencia la obtención de mayores valores acumulados en aquellas combinaciones que pasan más tiempo en el portafolio de Mayor Riesgo, pero a su vez estas están expuestas a mayores volatilidades que generan incluso la posibilidad de tener saldos en cero. Es el caso que se evidencia en el portafolio en el que el agente está 100% del tiempo en Mayor Riesgo, donde el saldo promedio acumulado y la volatilidad promedio de las 3 sendas son aproximadamente iguales, siendo esto más evidente en los hombres que en las mujeres. También se evidencia que el premio recibido por el riesgo asumido (fig. 5) es inferior en aquellos portafolios que se encuentran invertidos mayor proporción del tiempo en portafolios de menor volatilidad, sugiriendo que el riesgo que deben tomar los agentes para determinar el valor final de su cuenta es significativo; por esta razón se definió incluir la medición del VaR al 99% que permita a los individuos establecer su preferencia en la estimación del camino óptimo de inversión.

Con los valores finales de las cuentas resultantes de las simulaciones realizadas y, determinando mediante el modelo actuarial explicado en el numeral 3.4. el saldo que deben tener las cuentas de cada uno de los agentes para obtener tasas de reemplazo pensional del 50%, 60%, 70% y 80% (tabla 8), se realizó el cálculo de la probabilidad de alcanzar dichas tasas para cada uno de los agentes en cada combinación de portafolios (fig. 6). Allí se evidencia que para cada nivel de tasa de reemplazo, los agentes (tanto hombre como mujer) consiguen mayores probabilidades de alcanzar las tasas de reemplazo de-

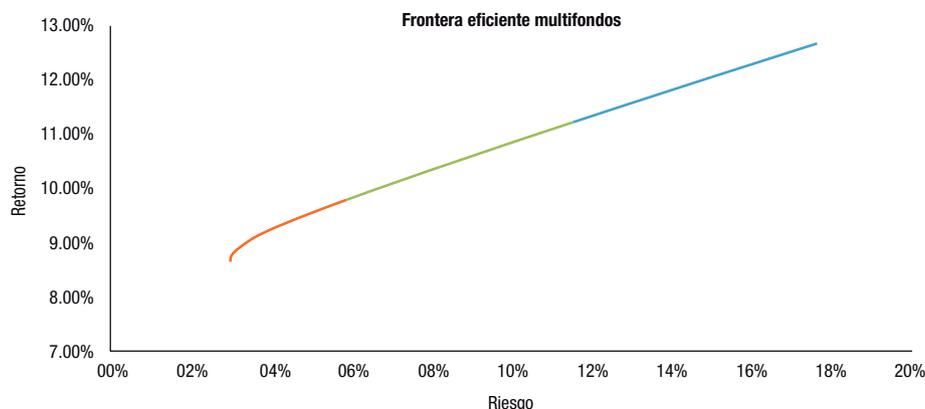


Figura 3. Frontera eficiente multifondos.

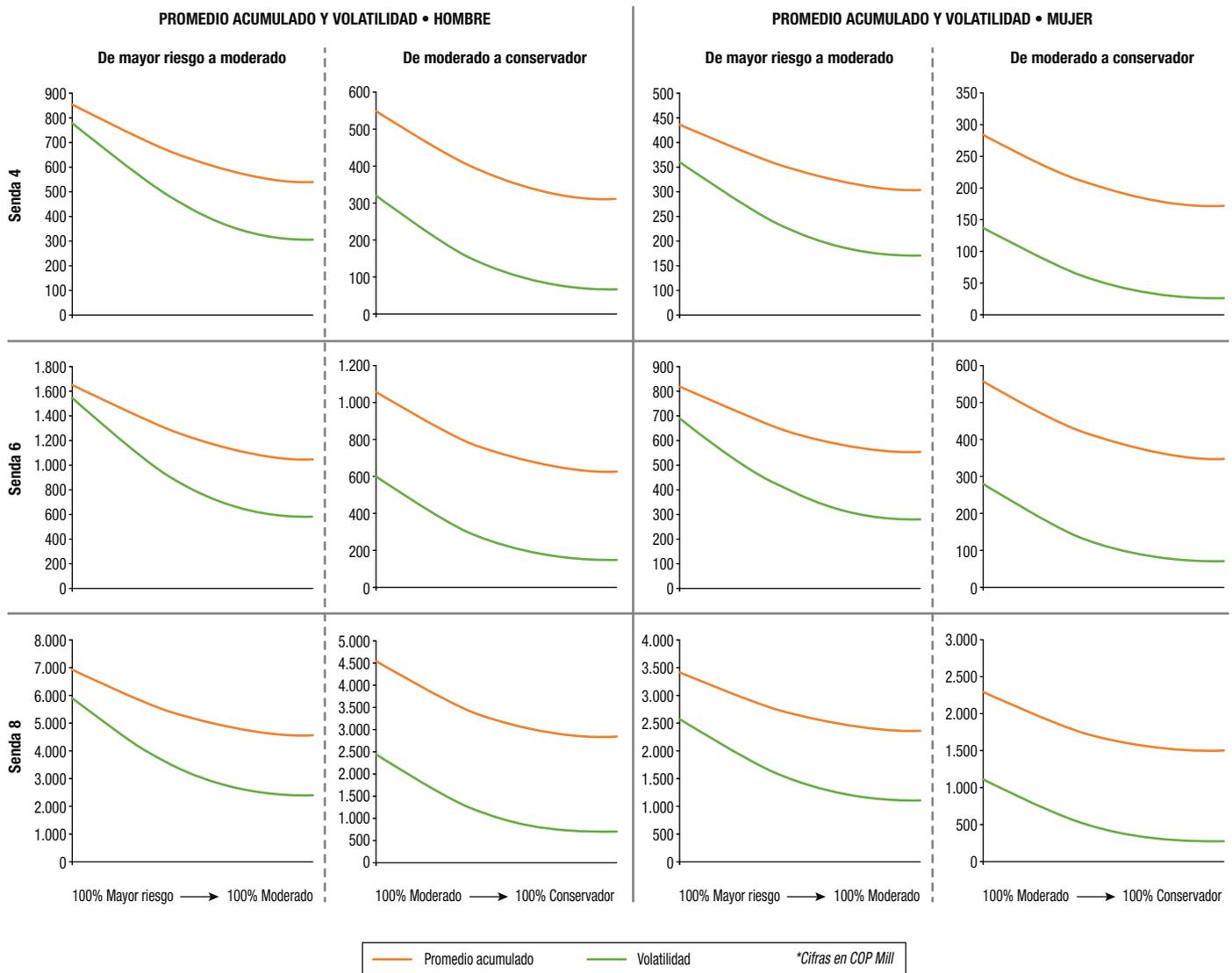


Figura 4. Se ilustra el valor promedio acumulado por un agente para cada combinación simulada y la volatilidad alcanzada en cada uno de estos posibles portafolios.

seadas en la medida que asuman más riesgo durante el período de acumulación de la cuenta individual, al igual que aquellos que tienen sendas salariales con menores niveles de ingreso. También se puede evidenciar que, para las mujeres, las probabilidades de alcanzar las tasas de reemplazo deseadas son menores que las de los hombres, incluso llegando esto a significar que toda mujer que pase el 100% del tiempo de acumulación en el portafolio conservador obtendrá tasas de reemplazo inferiores al 50%, mientras un hombre podría alcanzar tasas hasta del 70%; lo anterior posiblemente se debe al menor período activo de cotización y sendas salariales con ingresos inferiores al del hombre.

Con el fin de identificar la edad en la cual un agente debe migrar entre los fondos, se realizó un análisis donde se selecciona aquel momento donde las probabilidades de alcanzar dichas tasas de reemplazo son las mayores y los riesgos asumidos para alcanzarlas son los menores; para lo cual, siguiendo el enfoque conservador de esta investigación, se asumió que un agente preferiría aquella senda que le entrega la mayor probabilidad asumiendo el menor riesgo medido con un VaR al 99%.

Dado lo anterior, se utilizó la ecuación (6) para calcular para cada combinación de portafolio el valor esperado de obtener las tasas de reemplazo deseadas, dado el nivel de riesgo asumido.

$$E[Tr] = P_{i,j,k} \times VaR_{j,k} \tag{6}$$

Donde:

$E[Tr]$ = Tasa de Reemplazo esperada

$P_{i,j,k}$ = Probabilidad de alcanzar la tasa de reemplazo i en la combinación j del agente k .

$VaR_{j,k}$ = El valor mínimo obtenido con una probabilidad del 99% en la combinación j del agente k .

Adicionalmente, se identificó para cada agente la combinación que arroja el mayor valor, dando como resultado (tablas 9A y 9B) que, tanto los hombres como las mujeres, al desear mayores tasas de reemplazo deberán asumir más riesgo, estando mayor proporción del tiempo en el portafolio de Mayor Riesgo.

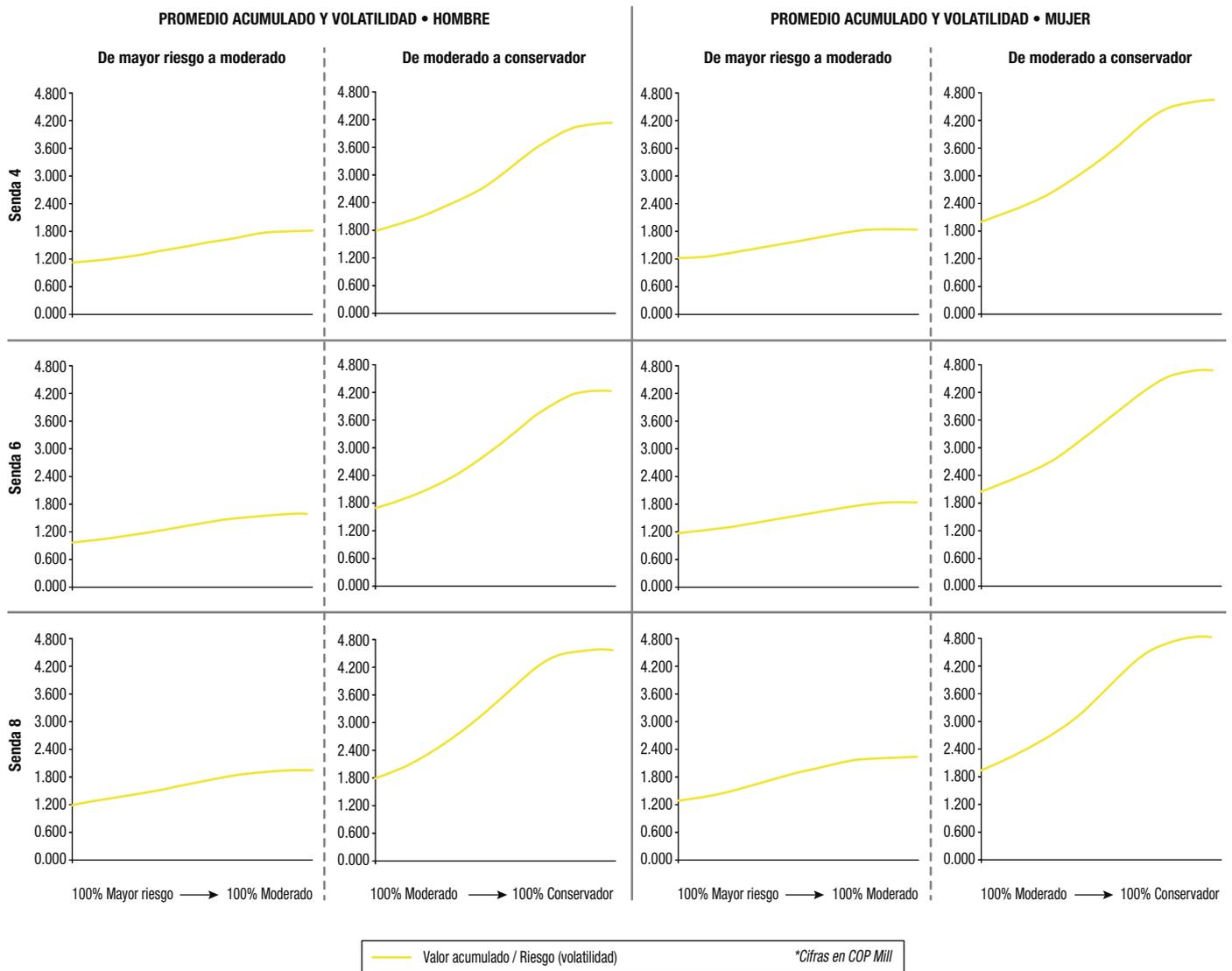


Figura 5. Se ilustra la relación Retorno-Volatilidad por género para cada combinación simulada en cada uno de los posibles portafolios.

Finalmente, se realizó la simulación asumiendo que el afiliado tiene la posibilidad de empezar en el Fondo de Mayor Riesgo, tener su vida media en Fondo Moderado y finalizar en Fondo Conservador. Se encontró que ninguno de los agentes debería pasar al Fondo Conservador, por lo que los resultados óptimos son iguales a los hallados en la simulación por pares de los Fondos Mayor Riesgo – Moderado, cuyas trayectorias óptimas de inversión dada la tasa de reemplazo deseada, son las que se muestran en las figuras 7A y 7B.

5. Conclusiones

En términos generales, se evidencia que los agentes deben permanecer un gran porcentaje de su vida laboral en el portafolio de mayor riesgo para alcanzar una mayor acumulación de capital financiero y una mayor probabilidad de alcanzar una alta tasa de reemplazo. Particularmente, se observa que las probabilidades de pensionarse con las tasas objetivas de reemplazo analizadas son significativamente menores para el género femenino que para el

género masculino. Ello obedece al menor tiempo y densidad de cotización de las mujeres. Esto puede servir de fundamento importante para el organismo regulador de cara a la realización de cambios que favorezcan la condición previsional futura del género femenino.

La decisión de un agente de trasladarse entre los diferentes Multifondos, con la finalidad de maximizar la probabilidad de alcanzar la tasa de reemplazo objetivo, dependerá directamente de su género (hombre o mujer), su expectativa salarial y densidad de cotización. Es así que de acuerdo a estas características y considerando que los agentes asumen un riesgo medido con un VaR al 99%, a la luz de esta investigación se realizan las siguientes recomendaciones:

- En general, si la tasa de reemplazo objetivo de un agente es del 80% o superior, este deberá permanecer en el Fondo Mayor Riesgo durante el 100% de la vida laboral con el fin de maximizar la probabilidad de obtener dicha tasa.
- Agentes cuya senda salarial se encuentre cercana a un salario mínimo legal mensual (SML) durante la mayor parte de su vida laboral y cuyo objetivo de tasa de reemplazo se encuentra en el

Tabla 8

Saldo acumulado necesario para Tasa de Reemplazo Objetivo

Agente	Sexo	Senda salarial	Último salario proyectado	Valor	Tasa de Reemplazo			
					50%	60%	70%	80%
1	Hombre	D4	\$ 4,82	Mesada	\$ 2,41	\$ 2,89	\$ 3,38	\$ 3,86
				Saldo acumulado necesario	\$ 362	\$ 434	\$ 506	\$ 579
2		D6	\$ 9,47	Mesada	\$ 4,73	\$ 5,68	\$ 6,63	\$ 7,57
				Saldo acumulado necesario	\$ 710	\$ 852	\$ 994	\$ 1.136
3		D8	\$ 45,40	Mesada	\$ 22,70	\$ 27,24	\$ 31,78	\$ 36,32
				Saldo acumulado necesario	\$ 3.405	\$ 4.086	\$ 4.767	\$ 5.448
4	Mujer	D4	\$ 3,04	Mesada	\$ 1,52	\$ 1,82	\$ 2,13	\$ 2,43
				Saldo acumulado necesario	\$ 328	\$ 394	\$ 459	\$ 525
5		D6	\$ 5,27	Mesada	\$ 2,64	\$ 3,16	\$ 3,69	\$ 4,22
				Saldo acumulado necesario	\$ 569	\$ 683	\$ 796	\$ 910
6		D8	\$ 23,32	Mesada	\$ 11,66	\$ 13,99	\$ 16,33	\$ 18,66
				Saldo acumulado necesario	\$ 2.518	\$ 3.021	\$ 3.525	\$ 4.028

Cifras en COP millones.

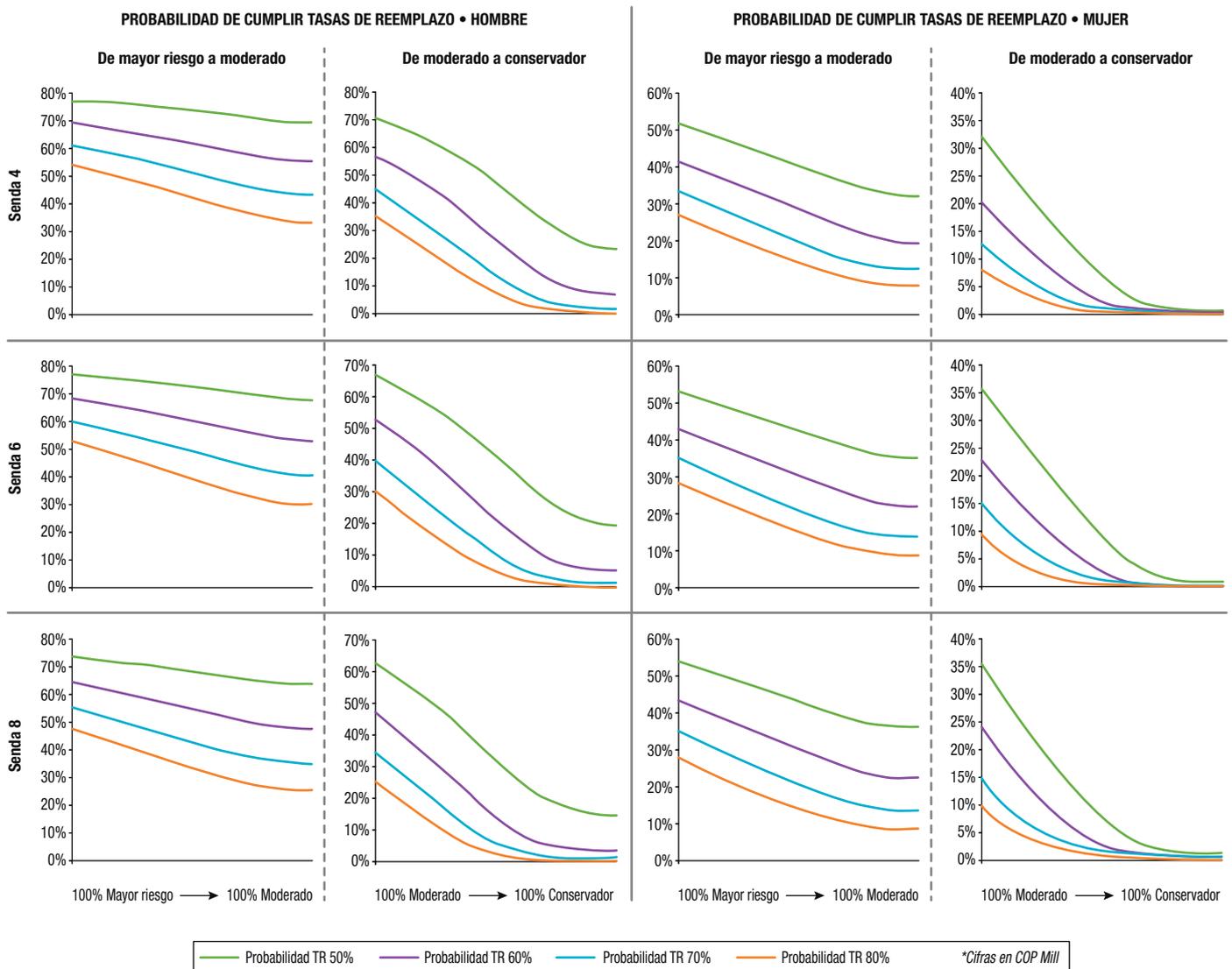


Figura 6. Probabilidad de alcanzar Tasas de Reemplazo (TR) Objetivo por género.

Tabla 9A
Probabilidad de obtener Tasas de Reemplazo Objetivo (hombres)

Hombre Decil 4													
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	39	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
Años que permanece en Renta Fija		39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	0	
TR 50%	Var 99% (Mill COP)	157,778,678	158,721,591	158,354,426	158,886,914	155,806,001	153,092,097	149,830,563	140,759,560	137,980,009	132,032,439	129,792,859	37
	Probabilidad de obtener TR (%)	69.34%	69.78%	70.78%	71.98%	73.10%	74.00%	74.91%	75.52%	76.15%	76.98%	77.19%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	109,403,736	110,755,926	112,083,263	114,366,801	113,894,187	113,288,151	112,238,075	106,301,620	105,071,777	101,638,572	100,187,108	45
	Probabilidad de obtener TR (%)	55.53%	56.10%	57.45%	58.99%	60.82%	62.19%	63.62%	65.11%	66.90%	67.86%	69.12%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	87,614,500	89,042,812	90,974,618	93,727,391	94,761,210	95,207,975	95,322,204	91,648,550	92,308,626	89,597,213	89,712,824	48
	Probabilidad de obtener TR (%)	43.73%	44.24%	45.61%	47.48%	49.65%	51.87%	54.22%	56.24%	58.28%	60.00%	61.39%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	68,996,616	70,218,432	72,225,454	75,439,507	77,357,680	79,408,870	81,238,131	79,163,177	80,414,749	79,219,463	79,679,836	62
	Probabilidad de obtener TR (%)	33.82%	34.45%	36.03%	38.14%	40.51%	42.88%	45.59%	48.30%	50.58%	52.77%	54.54%	
Var 99% * Probabilidad (Mill COP)		53,360,749	54,679,588	57,055,100	60,599,469	63,117,011	65,645,891	68,307,754	67,986,868	69,790,288	69,673,518	70,789,025	

Hombre Decil 6													
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	39	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
Años que permanece en Renta Fija		39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	0	
TR 50%	Var 99% (Mill COP)	309,352,993	310,328,623	313,363,080	310,729,506	306,425,718	297,995,418	296,207,404	286,121,090	272,571,101	264,774,006	255,597,795	37
	Probabilidad de obtener TR (%)	67.98%	68.31%	69.47%	70.63%	71.72%	72.93%	73.78%	74.67%	75.52%	76.47%	76.95%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	210,298,165	211,985,482	217,693,332	219,468,250	219,768,525	217,328,058	218,541,823	213,646,618	205,845,695	202,472,682	196,682,503	48
	Probabilidad de obtener TR (%)	53.72%	54.22%	55.36%	57.09%	58.94%	60.81%	62.41%	64.44%	65.80%	67.39%	68.30%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	166,184,428	168,260,179	173,477,801	177,395,475	180,607,318	181,211,013	184,863,041	184,376,431	179,351,784	178,431,203	174,573,294	53
	Probabilidad de obtener TR (%)	41.34%	41.87%	43.14%	45.02%	47.32%	50.18%	52.17%	54.65%	56.82%	58.61%	60.36%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	127,886,527	129,934,594	135,184,833	139,890,423	145,000,650	149,534,101	154,531,403	156,365,176	154,874,899	155,184,045	154,278,829	60
	Probabilidad de obtener TR (%)	31.41%	31.81%	33.14%	35.12%	37.72%	40.76%	43.61%	46.41%	48.64%	51.24%	53.07%	
Var 99% * Probabilidad (Mill COP)		97,167,775	98,715,535	103,848,525	109,128,202	115,583,781	121,462,932	129,176,049	132,788,798	132,578,583	135,670,201	135,645,750	

Hombre Decil 8													
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	39	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
Años que permanece en Renta Fija		39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	0	
TR 50 %	Var 99% (Mill COP)	1,478,885,038	1,487,900,324	1,490,813,771	1,492,247,060	1,493,027,432	1,466,874,061	1,445,342,315	1,402,115,355	1,355,509,110	1,293,336,746	1,246,331,394	41
	Probabilidad de obtener TR (%)	63.73%	63.94%	64.77%	65.65%	67.07%	68.14%	69.57%	70.88%	71.61%	72.65%	73.44%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	942,493,435	951,363,467	965,600,079	979,660,195	1,001,373,499	999,527,985	1,005,524,649	993,819,364	970,680,074	939,609,146	915,305,776	51
	Probabilidad de obtener TR (%)	47.76%	48.25%	49.24%	50.90%	52.79%	54.99%	57.03%	58.90%	60.70%	62.70%	64.16%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	706,315,494	717,911,907	734,076,701	759,553,754	788,169,181	806,634,046	824,278,722	825,845,944	822,794,030	810,922,140	799,646,222	58
	Probabilidad de obtener TR (%)	35.26%	35.70%	36.89%	38.72%	40.82%	43.57%	46.16%	48.54%	51.02%	53.39%	55.08%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	521,454,864	531,180,416	549,961,200	577,798,062	609,453,798	639,117,028	667,170,013	680,586,793	691,580,748	690,512,488	686,479,332	61
	Probabilidad de obtener TR (%)	25.76%	26.06%	27.22%	28.95%	30.99%	33.87%	37.21%	39.78%	42.67%	45.50%	47.48%	
Var 99% * Probabilidad (Mill COP)		380,960,786	387,746,825	405,799,508	432,005,524	462,689,201	496,830,244	537,811,875	557,761,488	578,395,737	588,468,219	591,758,146	

Tabla 9B
Probabilidad de obtener Tasas de Reemplazo Objetivo (mujeres)

Mujer Decil 4												
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	34	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
Años que permanece en Renta Fija		34	30	26	22	18	14	10	6	2	0	
TR 50%	Var 99% (Mill COP)	98,416,633	98,653,954	98,890,675	98,004,061	95,732,569	94,046,011	90,027,922	87,263,567	82,433,433	80,311,316	53
	Probabilidad de obtener TR (%)	31.89%	32.47%	34.35%	36.71%	39.43%	42.16%	45.06%	47.85%	50.49%	51.73%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	31,385,064	32,032,939	33,968,947	35,977,291	37,747,352	39,649,798	40,566,581	41,755,617	41,620,640	41,545,044	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	19.54%	19.98%	21.66%	24.36%	27.45%	30.57%	33.80%	36.85%	39.76%	41.03%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	19,230,610	19,711,060	21,419,720	23,873,789	26,278,590	28,749,866	30,429,438	32,156,624	32,775,533	32,951,733	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	11.94%	12.32%	13.55%	15.56%	18.63%	21.97%	24.88%	28.44%	31.67%	33.11%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	11,750,946	12,154,167	13,399,686	15,249,432	17,834,978	20,661,909	22,398,947	24,817,758	26,106,668	26,591,077	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	7.47%	7.70%	8.68%	10.49%	12.96%	15.79%	18.67%	21.90%	24.99%	26.57%	
	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	7,351,722	7,596,354	8,583,711	10,280,626	12,406,941	14,849,865	16,808,213	19,110,721	20,600,115	21,338,717	

Mujer Decil 6												
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	34	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
años que permanece en Renta Fija		34	30	26	22	18	14	10	6	2	0	
TR 50%	Var 99% (Mill COP)	179,533,368	179,360,775	180,402,699	178,334,027	177,754,731	173,853,944	165,782,510	156,484,597	148,241,445	145,214,943	49
	Probabilidad de obtener TR (%)	35.81%	36.45%	37.92%	40.11%	43.01%	45.59%	48.45%	50.71%	53.19%	54.05%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	64,290,899	65,377,003	68,408,704	71,529,778	76,452,310	79,260,013	80,321,626	79,353,339	78,849,625	78,488,677	56
	Probabilidad de obtener TR (%)	22.55%	23.24%	24.64%	27.04%	30.03%	33.43%	36.43%	39.43%	42.56%	43.94%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	40,484,775	41,683,444	44,451,225	48,221,521	53,379,746	58,119,373	60,394,568	61,701,877	63,091,559	63,807,446	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	14.21%	14.61%	15.73%	17.72%	20.63%	24.06%	27.26%	30.98%	33.89%	35.31%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	25,511,692	26,204,609	28,377,345	31,600,790	36,670,801	41,829,259	45,192,312	48,478,928	50,239,026	51,275,396	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	9.14%	9.50%	10.66%	12.27%	14.48%	17.81%	20.59%	23.97%	27.05%	28.84%	
	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	16,409,350	17,039,274	19,230,928	21,881,585	25,738,885	30,963,387	34,134,619	37,509,358	40,099,311	41,879,990	

Mujer Decil 8												
Años que permanece en Renta Variable		0	4	8	12	16	20	24	28	32	34	Edad de traslado de Mayor riesgo a Moderado
Años que permanece en Renta Fija		34	30	26	22	18	14	10	6	2	0	
TR 50%	Var 99% (Mill COP)	844,111,218	847,505,446	856,048,209	853,844,061	847,923,215	828,911,738	802,137,711	765,563,514	725,340,904	706,480,946	51
	Probabilidad de obtener TR (%)	36.83%	37.49%	38.34%	40.84%	43.38%	46.11%	48.82%	51.68%	54.32%	55.27%	
TR 60%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	310,886,161	317,729,792	328,208,883	348,709,914	367,829,091	382,211,203	391,603,630	395,643,224	394,005,179	390,472,019	54
	Probabilidad de obtener TR (%)	22.51%	23.03%	24.17%	26.64%	29.59%	33.07%	36.49%	39.52%	42.69%	44.33%	
TR 70%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	190,009,435	195,180,504	206,906,852	227,464,058	250,900,479	274,121,112	292,700,051	302,550,701	309,648,032	313,183,003	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	13.65%	13.89%	14.85%	16.90%	19.79%	22.91%	26.85%	30.32%	33.68%	35.65%	
TR 80%	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	115,221,181	117,718,506	127,123,159	144,299,646	167,804,004	189,903,679	215,373,975	232,118,858	244,294,816	251,860,457	57
	Probabilidad de obtener TR (%)	8.29%	8.59%	9.44%	11.05%	13.33%	16.24%	19.43%	22.74%	26.47%	28.00%	
	Var 99% * Probabilidad (Mill COP)	69,976,820	72,800,718	80,810,951	94,349,769	113,028,165	134,615,266	155,855,357	174,089,143	191,997,737	197,814,665	

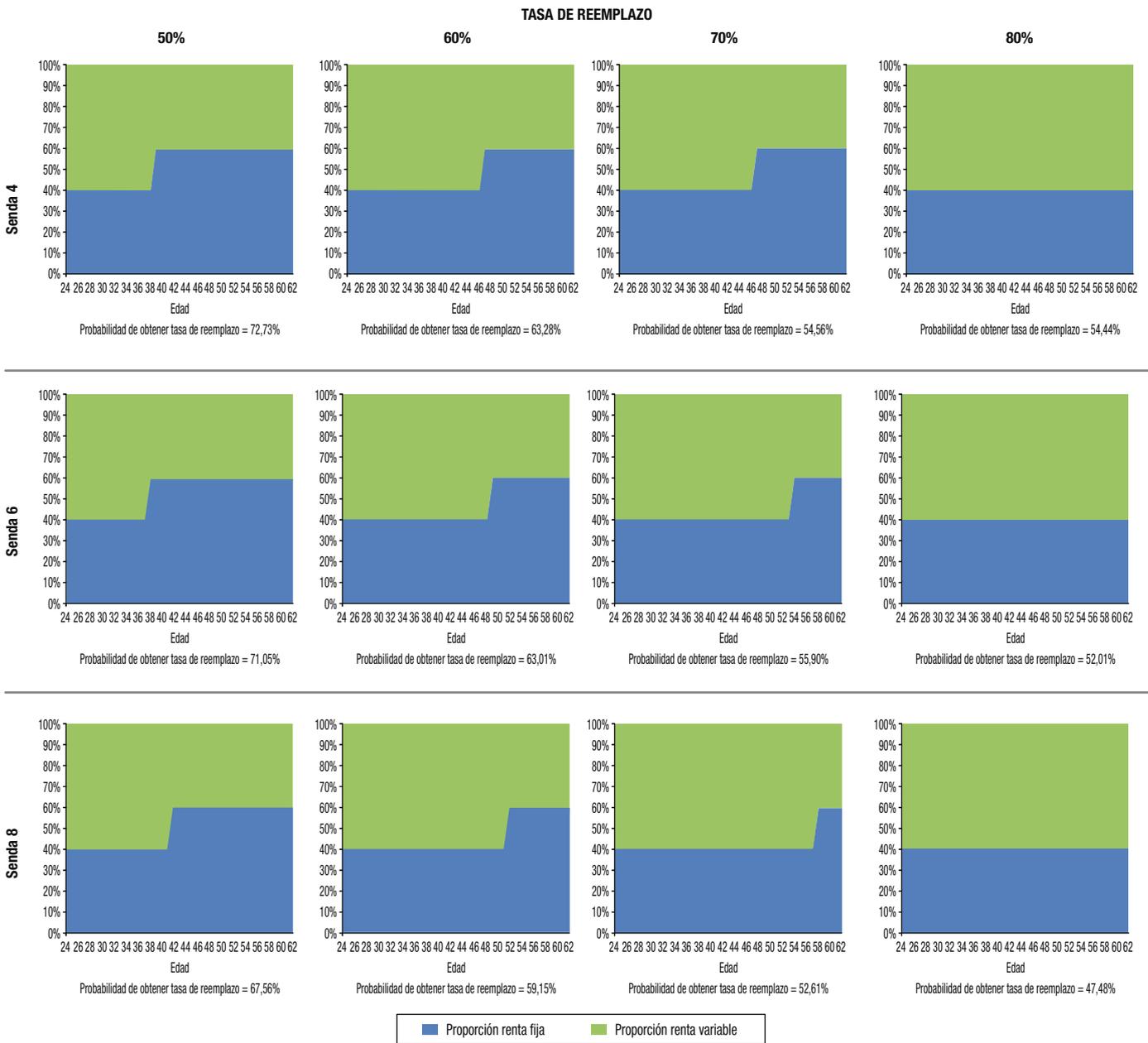


Figura 7A. Trayectoria óptima de inversión (Hombres)

50%, deberán realizar el traslado de la riqueza acumulada en su cuenta individual del portafolio de Mayor Riesgo al Moderado, aproximadamente a los 37 años para los hombre y 53 años para las mujeres. Si el objetivo de tasa de reemplazo se encuentra en el 60% o 70%, la edad del traslado para los hombres se deberá realizar a los 45 y 47 años, respectivamente; las mujeres deberán permanecer hasta el final de su vida laboral en el fondo de Mayor Riesgo.

- Agentes con sendas salariales entre 2 y 3 SML (Senda 6) deberán realizar el traslado de su riqueza entre fondos de la siguiente forma (tabla 10):
- Un hombre con una expectativa salarial creciente, una mayor densidad de cotización (Senda 8) y que desea alcanzar una mayor probabilidad de obtener una tasa de reemplazo del 50%, deberá realizar el traslado a los 41 años del Fondo de Mayor Riesgo

al Fondo Moderado; para alcanzar unas tasas de reemplazo del 60% y 70% deberá realizar el cambio a los 51 y 58 años, respectivamente. Para las mujeres de estas características salariales y densidad de cotización que deseen una tasa de reemplazo del 50% el cambio deberá realizarse a los 51 años y para una tasa de reemplazo del 60% deberán realizarlo a los 54 años.

Tabla 10
Edad de traslado senda 6

Género	50%	60%	70%
Hombre	37 años	48 años	53 años
Mujer	49 años	56 años	Toda la vida mayor riesgo

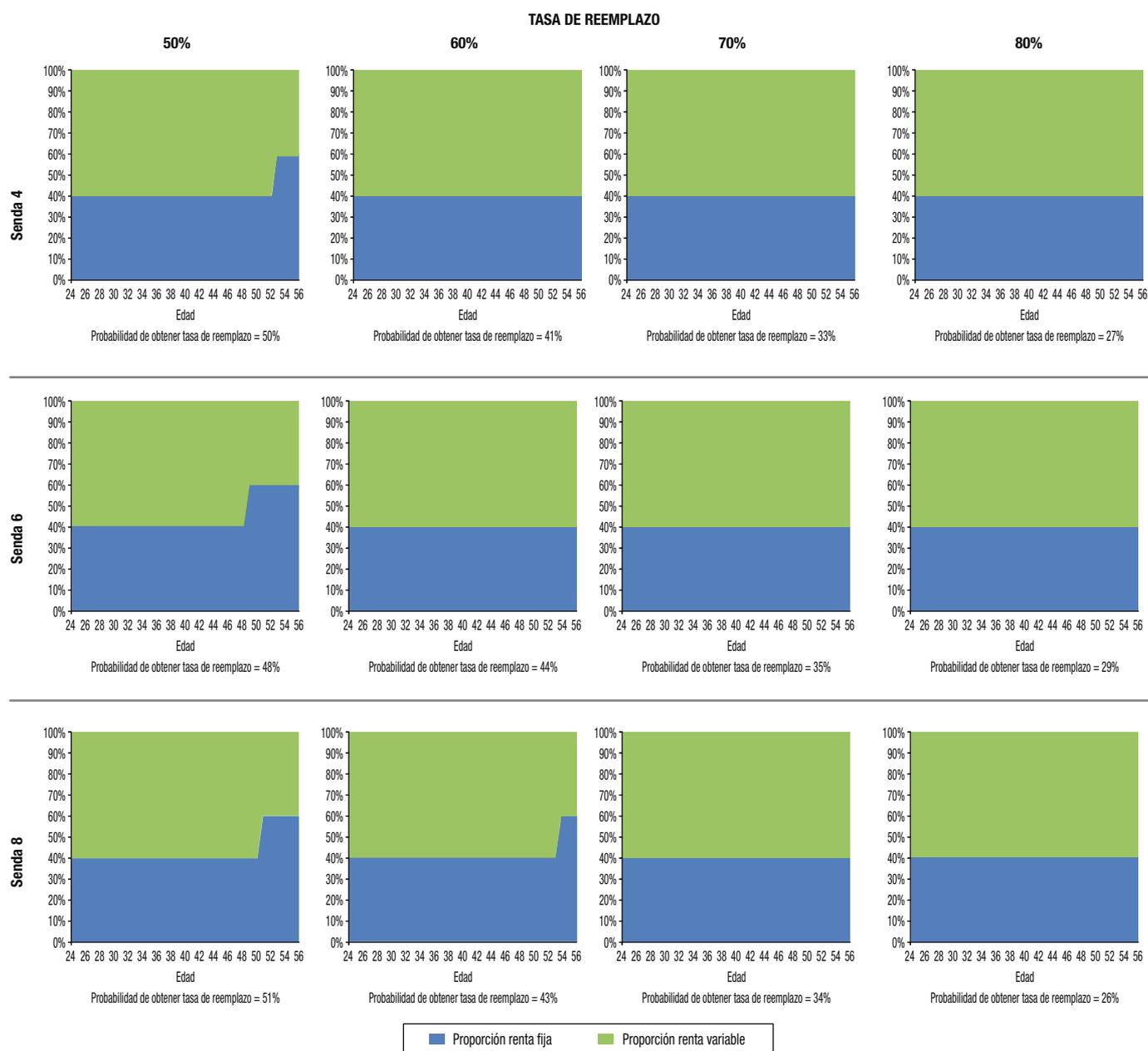


Figura 7B. Trayectoria óptima de inversión (Mujeres)

En síntesis, el diseño de trayectorias óptimas de inversión durante el ciclo de vida consiste en la relación entre la asignación de activos del fondo y la edad del inversionista. En este sentido, la futura consolidación del esquema de Multifondos en Colombia dependerá de la adopción de decisiones de política pública que favorezcan la inversión en renta variable en etapas tempranas del ciclo de vida del inversionista; es decir, definiendo el Fondo de Mayor Riesgo como opción por defecto para las cohortes jóvenes que ingresan al sistema. Sin embargo, a pesar de reconocerse esto como necesario, por sí solo no será suficiente si la economía en la que opera el sistema no avanza en materia de formalización empresarial; porque para poder mejorar la capacidad de ahorro se necesitan mejores empleos. Adicionalmente, la otra variable que juega un papel decisivo es la educación financiera-previsional de la población. Los esfuerzos gubernamentales y empresariales que se hagan en este último frente tienen el potencial de mejorar la calidad de las decisiones que toman

individuos y familias durante su ciclo de vida financiero. El efecto combinado de estos elementos será determinante para mejorar las probabilidades de maximizar las tasas de reemplazo, especialmente para el género femenino.

Por otra parte, de cara al futuro surgen nuevos enfoques complementarios de investigación en el área de las estrategias de inversión en fondos de ciclo de vida, tales como la distinción entre diseño de trayectorias óptimas hasta la fecha de retiro (*glidepath to*) y trayectorias óptimas que evolucionen después de la fecha de retiro (*glidepath through*); para establecer el vínculo entre las fases de acumulación y desacumulación previsional. Adicionalmente, futuras investigaciones en este frente deberán abordar el efecto concomitante sobre el valor ejercido por la presencia de factores de riesgo de cola (*tail risk*), caracterizados por su baja probabilidad de ocurrencia y su alto impacto y la ocurrencia de riesgos sistémicos. Esto reviste una singular importancia debido a que la creciente magnitud de

ahorro previsional canalizable en inversiones de renta fija y variable se invertirá en contextos de mercados ampliados con mayor interdependencia con los mercados externos globales. La pregunta que surge aquí es cómo y en qué medida la ocurrencia de estos riesgos induce efectos de «pérdida de riqueza» en el capital acumulado por el afiliado cotizante en pensiones y cómo esto afecta la sostenibilidad de su ingreso en el retiro en términos de poder adquisitivo.

Otro de los temas que se recomienda incluir en futuras investigaciones consiste en modelar la evolución del nivel de aversión al riesgo

del afiliado a lo largo del ciclo de vida y verificar su efecto sobre las decisiones de inversión. También surgen otras posibilidades de investigación desde la perspectiva del Administrador del Fondo de Pensiones, que opera como agente cuya función social consiste en maximizar la tasa de reemplazo de sus afiliados. Las preguntas que surgen son: ¿Qué rol juega la aversión al riesgo del gestor del Fondo de Pensiones y qué implicaciones tiene esto para el diseño de contratos?, es decir, ¿qué esquemas de remuneración vía comisiones son óptimos en el largo plazo?

Anexo 1

Tabla de mortalidad (resolución número 1555 del año 2010)

TABLA DE MORTALIDAD DE RENTISTAS HOMBRES

EXPERIENCIA 2006-2008				
x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^x (x)
15	1,000,000	485	0.000485	64.8
16	999,515	496	0.000496	63.9
17	999,019	509	0.000509	62.9
18	998,510	522	0.000523	61.9
19	997,988	537	0.000538	60.9
20	997,451	553	0.000554	60.0
21	996,898	571	0.000573	59.0
22	996,327	591	0.000593	58.0
23	995,736	612	0.000615	57.1
24	995,124	636	0.000639	56.1
25	994,488	662	0.000666	55.1
26	993,826	690	0.000694	54.2
27	993,136	721	0.000726	53.2
28	992,415	755	0.000761	52.3
29	991,660	792	0.000799	51.3
30	990,868	832	0.000840	50.3
31	990,036	877	0.000886	49.4
32	989,159	926	0.000936	48.4
33	988,233	979	0.000991	47.5
34	987,254	1,038	0.001051	46.5
35	986,216	1,102	0.001117	45.6
36	985,114	1,172	0.001190	44.6
37	983,942	1,249	0.001269	43.7
38	982,693	1,333	0.001356	42.7
39	981,360	1,424	0.001451	41.8
40	979,936	1,525	0.001556	40.8
41	978,411	1,635	0.001671	39.9
42	976,776	1,755	0.001797	39.0
43	975,021	1,886	0.001934	38.0
44	973,135	2,030	0.002086	37.1
45	971,105	2,186	0.002251	36.2
46	968,919	2,358	0.002434	35.3
47	966,561	2,544	0.002632	34.4
48	964,017	2,748	0.002851	33.4
49	961,269	2,971	0.003091	32.5
50	958,298	3,213	0.003353	31.6
51	955,085	3,477	0.003641	30.7
52	951,608	3,765	0.003956	29.9
53	947,843	4,077	0.004301	29.0
54	943,766	4,418	0.004681	28.1
55	939,348	4,744	0.005050	27.2
56	934,604	5,106	0.005463	26.4
57	929,498	5,507	0.005925	25.5
58	923,991	5,952	0.006442	24.6
59	918,039	6,444	0.007019	23.8
60	911,595	6,988	0.007666	23.0
61	904,607	7,588	0.008388	22.1
62	897,019	8,250	0.009197	21.3

EXPERIENCIA 2006-2008				
x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^x (x)
63	888,769	9,134	0.010277	20.5
64	879,635	10,078	0.011457	19.7
65	869,557	11,080	0.012742	19.0
66	858,477	12,143	0.014145	18.2
67	846,334	13,265	0.015673	17.4
68	833,069	14,446	0.017341	16.7
69	818,623	15,683	0.019158	16.0
70	802,940	16,972	0.021137	15.3
71	785,968	18,310	0.023296	14.6
72	767,658	19,688	0.025647	14.0
73	747,970	21,098	0.028207	13.3
74	726,872	22,530	0.030996	12.7
75	704,342	23,970	0.034032	12.1
76	680,372	25,402	0.037335	11.5
77	654,970	26,808	0.040930	10.9
78	628,162	28,168	0.044842	10.4
79	599,994	29,456	0.049094	9.8
80	570,538	30,646	0.053714	9.3
81	539,892	31,711	0.058736	8.8
82	508,181	32,619	0.064188	8.3
83	475,562	33,340	0.070107	7.8
84	442,222	33,841	0.076525	7.4
85	408,381	34,093	0.083483	7.0
86	374,288	34,069	0.091023	6.6
87	340,219	33,745	0.099186	6.2
88	306,474	33,103	0.108012	5.8
89	273,371	32,136	0.117555	5.4
90	241,235	30,844	0.127859	5.1
91	210,391	29,239	0.138975	4.8
92	181,152	27,344	0.150945	4.5
93	153,808	25,199	0.163834	4.2
94	128,609	22,851	0.177678	3.9
95	105,758	20,363	0.192543	3.6
96	85,395	17,839	0.208900	3.3
97	67,556	15,350	0.227219	3.1
98	52,206	12,921	0.247500	2.9
99	39,285	10,597	0.269747	2.6
100	28,688	8,433	0.293956	2.4
101	20,255	6,484	0.320118	2.2
102	13,771	4,796	0.348268	2.1
103	8,975	3,395	0.378273	1.9
104	5,580	2,290	0.410394	1.7
105	3,290	1,462	0.444377	1.6
106	1,828	878	0.480306	1.4
107	950	492	0.517895	1.3
108	458	256	0.558952	1.1
109	202	121	0.599010	0.9
110	81	81	1.000000	0.5

Donde:

x: Edad actuarial.

l(x): Indica el número de sobrevivientes a la edad x tomando un grupo inicial supuesto de 1000000 de personas de 15 años de edad.

d(x): Indica el número esperado de personas que fallecen a la edad x, sin alcanzar la edad x + 1, donde $d(x) = l(x) - l(x + 1)$.

q(x): Indica la probabilidad de fallecer a la edad x, sin alcanzar la edad x + 1. Esto es, $q(x) = d(x)/l(x)$.

e^x(x): Vida media completa. Años esperados de vida de una persona de edad x, antes de morir.

Tabla de mortalidad (resolución número 1555 del año 2010)

TABLA DE MORTALIDAD DE RENTISTAS MUJERES

EXPERIENCIA 2005-2008				
x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^o (x)
15	1,000,000	272	0.000272	70.0
16	999,728	278	0.000278	69.1
17	999,450	285	0.000285	68.1
18	999,165	293	0.000293	67.1
19	998,872	302	0.000302	66.1
20	998,570	311	0.000311	65.1
21	998,259	321	0.000322	64.2
22	997,938	332	0.000333	63.2
23	997,606	344	0.000345	62.2
24	997,262	357	0.000358	61.2
25	996,905	372	0.000373	60.2
26	996,533	388	0.000389	59.3
27	996,145	405	0.000407	58.3
28	995,740	425	0.000427	57.3
29	995,315	446	0.000448	56.3
30	994,869	469	0.000471	55.4
31	994,400	494	0.000497	54.4
32	993,906	522	0.000525	53.4
33	993,384	552	0.000556	52.4
34	992,832	585	0.000589	51.5
35	992,247	622	0.000627	50.5
36	991,625	662	0.000668	49.5
37	990,963	705	0.000711	48.6
38	990,258	753	0.000760	47.6
39	989,505	806	0.000815	46.6
40	988,699	863	0.000873	45.7
41	987,836	926	0.000937	44.7
42	986,910	994	0.001007	43.7
43	985,916	1,070	0.001085	42.8
44	984,846	1,152	0.001170	41.8
45	983,694	1,242	0.001263	40.9
46	982,452	1,341	0.001365	39.9
47	981,111	1,448	0.001476	39.0
48	979,663	1,566	0.001599	38.0
49	978,097	1,695	0.001733	37.1
50	976,402	1,836	0.001880	36.2
51	974,566	1,990	0.002042	35.2
52	972,576	2,158	0.002219	34.3
53	970,418	2,341	0.002412	33.4
54	968,077	2,541	0.002625	32.5
55	965,536	2,735	0.002833	31.6
56	962,801	2,950	0.003064	30.6
57	959,851	3,189	0.003322	29.7
58	956,662	3,456	0.003613	28.8
59	953,206	3,752	0.003936	27.9
60	949,454	4,082	0.004299	27.0
61	945,372	4,447	0.004704	26.2
62	940,925	4,853	0.005158	25.3

EXPERIENCIA 2005-2008				
x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^o (x)
63	936,072	5,303	0.005665	24.4
64	930,769	5,801	0.006232	23.5
65	924,968	6,351	0.006866	22.7
66	918,617	6,959	0.007576	21.8
67	911,658	7,629	0.008368	21.0
68	904,029	8,367	0.009255	20.2
69	895,662	9,177	0.010246	19.4
70	886,485	10,065	0.011354	18.6
71	876,420	11,036	0.012592	17.8
72	865,384	12,095	0.013976	17.0
73	853,289	13,245	0.015522	16.2
74	840,044	14,490	0.017249	15.5
75	825,554	15,832	0.019177	14.7
76	809,722	17,272	0.021331	14.0
77	792,450	18,809	0.023735	13.3
78	773,641	20,439	0.026419	12.6
79	753,202	22,154	0.029413	11.9
80	731,048	23,943	0.032752	11.3
81	707,105	25,791	0.036474	10.6
82	681,314	27,677	0.040623	10.0
83	653,637	29,572	0.045242	9.4
84	624,065	31,445	0.050387	8.9
85	592,620	33,252	0.056110	8.3
86	559,368	34,945	0.062472	7.8
87	524,423	36,469	0.069541	7.3
88	487,954	37,762	0.077388	6.8
89	450,192	38,757	0.086090	6.3
90	411,435	39,386	0.095728	5.8
91	372,049	39,709	0.106731	5.4
92	332,340	39,700	0.119456	5.0
93	292,640	39,188	0.133912	4.6
94	253,452	38,041	0.150092	4.2
95	215,411	36,189	0.168000	3.9
96	179,222	33,628	0.187633	3.5
97	145,594	30,428	0.208992	3.2
98	115,166	26,728	0.232082	3.0
99	88,438	22,719	0.256692	2.7
100	65,719	18,627	0.283434	2.5
101	47,092	14,679	0.311709	2.3
102	32,413	11,075	0.341684	2.1
103	21,338	7,968	0.373418	1.9
104	13,370	5,440	0.406881	1.7
105	7,930	3,505	0.441992	1.6
106	4,425	2,119	0.478870	1.4
107	2,306	1,194	0.517780	1.3
108	1,112	620	0.557554	1.1
109	492	295	0.599593	0.9
110	197	197	1.000000	0.5

Donde:

x: Edad actuarial.

l(x): Indica el número de sobrevivientes a la edad x tomando un grupo inicial supuesto de 1 000 000 de personas de 15 años de edad.

d(x): Indica el número esperado de personas que fallecen a la edad x, sin alcanzar la edad x + 1, donde $d(x) = l(x) - l(x + 1)$.q(x): Indica la probabilidad de fallecer a la edad x, sin alcanzar la edad x + 1. Esto es, $q(x) = d(x) / l(x)$.e^o(x): Vida media completa. Años esperados de vida de una persona de edad x, antes de morir.**Anexo 2**

Glosario

SMLM:	Salario mínimo legal mensual.
COLCAP:	Es un índice de capitalización que refleja las variaciones de los precios de las 20 acciones más líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), donde la participación de cada acción en el índice está determinada por el correspondiente valor de la capitalización bursátil ajustada (flotante de la compañía multiplicado por el último precio).
TES:	Los Títulos de Tesorería (TES) constituyen un mecanismo de financiación interna del gobierno nacional de Colombia.
TF:	Son Títulos de Tesorería (TES) a tasa fija.
UVR:	Son Títulos de Tesorería (TES) denominados en Unidades de Valor Constante (UVR).
RF:	Títulos de renta fija local.
COP Mill:	Millones de pesos colombianos.
COP:	Pesos colombianos.

Bibliografía

- Alonso, J., Herrera, C., Llanes, M. y Tuesta, D. (2010). *Simulaciones de rentabilidades de largo plazo y tasas de reemplazo en el sistema de pensiones de Colombia*. Madrid: BBVA Research.
- Antolin, P., Payet S. y Yermo, J. (2010). Assessing default investment strategies in defined contribution pension plan. *OECD Journal: Financial Market Trends*, (1), 87-115.
- Arango, L. y Posada C. (2002). *La participación laboral en Colombia*. Bogotá: Banco de la República.
- ASOFONDOS (2012). *Multifondos*. Disponible en: <http://www.asofondos.org.co/multifondos> [consultado 1 Jul 2012].
- Bengen, W. (1994). Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial Planning*, 7(4), 171-180.
- Clavijo, S., Vera, A., Vera, N., Mora, S., González, M., Velandia, D., Otálora, A. y Cuervo, C. (2012). *Mercado de renta variable en Colombia: una visión de largo plazo en medio de la turbulencia internacional*. Bogotá: ANIF y Correal.
- Clavijo, S., Peña, M., Gonzales, A. y Vera, A. (2011). *La torre de Babel pensional. Hacia una cartilla actuarial en Colombia*. Bogotá: ANIF.
- Fernández, P., Aguirreamalloy, J. y Corres, L. (2011). Market risk premium used in 56 countries in 2011: A survey with 6,014 answers. Disponible en (SSRN): <http://ssrn.com/abstract=1822182> o <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1822182>, Mayo 2011, 1-18.

- Hernández, C. (2009). Efectos del sistema multifondos en el régimen de ahorro individual en Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 12(2), 179-211.
- Herscovich, H. (2003). *La utilización de multifondos en el sistema de pensiones chileno - El caso CUPRUM*. Argentina: Universidad de San Andrés.
- Jara D. P., Gómez C. R. y Pardo A. A. (2009). Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales obligatorios en Colombia. En J. J. M. Laserna y Gómez C. R. (Eds.). *Pensiones y portafolios: la construcción de una política pública* (pp. 35-75). Bogotá: Banco de la República. Universidad Externado de Colombia.
- Jacobsen, B., Chan, C. y Barbee, O. (2010). Balancing longevity risk and market risk in target date funds. *Rotman international Journal of Pension Management*, 3(2), 58-65.
- León C.R. y Laserna J. J.M. (2009). Asignación estratégica de activos para fondos de pensiones obligatorias en Colombia: un enfoque alternativo. En J. J. M. Laserna, Gómez C. R. (Eds.). *Pensiones y portafolios: la construcción de una política pública* (pp. 77-114). Bogotá: Banco de la República. Universidad Externado de Colombia.
- Litterman, R. *Risk measurement, modern investment management*. New Jersey: John Wiley & Sons; 2003.
- Malkiel, B. (1996). *A random walk down wall street: A life-cycle guide to investing*. Norton, NY: W.W. Norton & Company, Inc.
- Montenegro, S. (2012). *Documento presentado en el Seminario Protección Social en Colombia. Reformas para mejorar sus sistemas de pensiones*. Bogotá, Colombia.
- Pfau, W. (2010). Lifecycle funds and wealth accumulation for retirement: evidence for a more conservative asset allocation as retirement approaches. *Financial Service Review*, 10, 59-74.
- Restrepo, J. y Gutiérrez, J. (2010). Valoración de la garantía de pensión en las cuentas de ahorro individual en Colombia. *INNOVAR*, 21(41), 51-62.
- Revez, A. y León, C. (2008). Administración de fondos de pensiones y multifondos en Colombia. *Borradores de Economía*, 506, 1-28.
- Revez, A., León, C., Castro, F. y Piraquive, G. (2009). Modelo de simulación del valor de la pensión de un trabajador en Colombia. *Borradores de Economía*, 553, 1-42.
- Salter, J. y Evensky, H. (2008). Calculating a sustainable withdrawal rate: A comprehensive literature review. *Journal of Personal Finance*, 6(4), 119-138.
- Santa María, M., Steiner, R., Botero, J., Martínez, M., Millán, N. y Arias, M. (2010). *El sistema pensional en Colombia: retos y alternativas para aumentar la cobertura*. Bogotá: FEDESARROLLO.
- Valdés, S. (2010). Acciones, plazo de inversión y multifondos. *Estudios Públicos*, 117, 125-173.
- Valverde, F. y Pena, H. (2011). Determinantes de la tasas de reemplazo de pensiones de capitalización individual: escenarios latinoamericanos comparados. *CEPAL - Serie seminarios y conferencias*, 64, 1-70.
- Yoon y. (2010). Glide path and dynamic asset allocation of target date funds. *Journal of Asset Management*, 11(5), 346-360.